

DEVOIR DE RENTRÉE – CORRECTION – VERSION PROVISOIRE.

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

REMARQUES / COMMENTAIRES / ERREURS FRÉQUENTES.

Stratégie générale, décryptage du sujet.

- Les deux exercices de concours présentés ici sont globalement d'un niveau de difficulté habituel, avec quelques questions de cours ou quelques questions très faciles, et des parties plus techniques ou qui demandent plus d'initiative. Il faudra viser à être performant sur ce type d'énoncé.
- La gestion du temps demande à être optimisée, l'exercice 3 de probas a été sensiblement moins traité (peut-être par choix) mais la plupart d'entre vous a ignoré la partie C qui contenait quelques questions faciles et quelques points à prendre rapidement.
- Il va falloir de toute façon gagner en efficacité. Peu de gens parviennent à rentrer dans la totalité du sujet.
- Peu d'efforts sont faits pour soigner la copie et la rendre agréable à lire. S'il n'est bien sûr pas attendu que vous vous concentriez en priorité sur l'esthétique, je rappelle que la présentation rapporte des points (ou en fait perdre).
- La classe possède un niveau remarquablement homogène, l'écart-type est le plus petit que j'ai jamais rencontré pour un devoir de rentrée. Tant mieux ! Il y a cependant quelques copies extrêmement faibles et une copie bien au-dessus des autres.
- Les raisonnements par équivalence et a fortiori les symboles $\iff$ sont à utiliser en toute connaissance de cause. Il est rare qu'un raisonnement par équivalence soit nécessaire, raisonner par équivalence est donc bien souvent inutile et risqué (voir sur mon site pour des explications détaillées).
- Il faut (connaître et) citer les hypothèses des théorèmes que l'on utilise.
- Il faut s'investir en Python ! Ce n'est pas la partie du programme la plus difficile et c'est celle qui rapporte le plus.
- Dans un raisonnement par récurrence, il est absolument nécessaire d'énoncer très clairement les propriétés $\mathcal{P}_n$ que l'on veut démontrer par récurrence. Et, au cours de l'hérédité, il est nécessaire de montrer où on utilise l'hypothèse de récurrence.

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 1.

- Il s'agit d'un exercice bien *plus facile* qu'un sujet de concours et qui devait avoir été préparé. Les étudiants qui n'ont pas pris le temps de faire 20 exercices de maths pendant l'été se sont engagés à vivre une année pénible, et probablement peu satisfaisante au final.
- La formule du binôme est mal connue et surtout, peu d'entre vous savent qu'il faut impérativement que les matrices commutent pour pouvoir l'appliquer.
- Beaucoup d'approximations dans le vocabulaire des équadiffs.

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 2.

- C'est de loin l'exercice le mieux traité et celui qui a rapporté le plus de points.
- L'étude de fonctions, quoique plutôt globalement réussie n'a pas donné souvent de représentation graphique satisfaisante. La question de dessin est très classique. Il est indispensable de bien faire apparaître toutes les informations qui ont été récoltées sur la fonction. Attention à la cohérence ! Il est fréquent que l'ensemble de définition $I =]-\infty, 1[$ ait été bien trouvé, mais il a souvent été perdu sur le dessin. On voit alors des fonctions qui semblent définies plutôt sur $\mathbb{R}$. La remarque vaut aussi pour les limites, le fait que la fonction tend vers $+\infty$ en 1^- n'apparaît pas bien.
- Beaucoup d'erreurs sur l'équation de la tangente.
- Pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction, il est bon d'expliquer (rapidement) la contrainte. Par exemple, "le dénominateur ne doit pas s'annuler" ou encore ici "le logarithme est défini sur $\mathbb{R}_+^*$ " etc.
- Le raisonnement par récurrence n'est pas un remède miracle pour démontrer toutes les propriétés qui dépendent d'un paramètre n entier. Pour tenter une récurrence, il faut auparavant se convaincre que les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont reliées. Sinon l'hypothèse de récurrence n'apportera rien d'exploitable.
- Les questions sur les séries et sur les sommes étaient assez difficile pour les carrés (en particulier la question 7. qui utilise un argument de 2ème année). Je traite aussi la question 8.a en cours.
- Attention S_{2n} signifie que l'on somme tous les termes jusqu'à un indice pair, et ce n'est pas la même chose que sommer tous les termes d'indices pairs.
- Beaucoup de flou dans la définition de suites adjacentes.
- Les calculs d'intégrales et la recherche de primitives est souvent bien fait. L'intégration par parties de la question 11 beaucoup moins.
- Personne n'a su faire la question 13.a. La question 14 n'a presque pas été touchée.

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 3.

- Ne pas aimer les probas est une bonne raison pour en faire beaucoup plus. C'est le thème du programme le plus représenté dans les sujets, on ne peut pas se permettre de faire l'impasse.
- Le cours est horriblement mal connu. Il arrive bien souvent que vous ne sachiez pas quelle est l'espérance de la loi géométrique, ni son support, ni d'ailleurs sa loi. Il faut consolider ses connaissances de cours en urgence !!
- J'ai été assez tolérant pour la question 1.a. Je rappelle que variable aléatoire suit la loi géométrique de paramètre p si elle prend la valeur du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli *indépendantes* et de *même probabilité de succès* p .. Oublier l'une ou l'autre de ces deux hypothèses est lourdement pénalisé (probablement 0 à la question).
- En probas plus qu'ailleurs, il faut faire attention à son langage. Les fautes d'identification de la nature des objets sont lourdement pénalisées en ECG. Il faut absolument se poser la question de savoir si on est en train de parler d'un événement, d'une variable aléatoire, d'une probabilité (c'est-à-dire un nombre entre 0 et 1),...

Un correcteur qui lit des bouts de calculs avec des expressions du genre $P(A) \cap P(B)$ ou $P(X)$ alors que X est une variable aléatoire ne lira pas votre réponse à la question et vous mettra automatiquement 0.

- Encore une fois, les programmes Python rapportent beaucoup pour relativement peu d'efforts. Ce sont souvent ces questions qui sauvent les copies très faibles ou qui font la différence parmi les copies de bons niveaux.
- Parmi les bonnes habitudes à prendre en programmation, on peut noter :
 - Si votre programme a pour but de simuler une variable aléatoire, il est indispensable qu'il y ait dans votre programme des fonctions aléatoires (de la bibliothèque `numpy.random`). Ça doit vous alerter si ce n'est pas le cas.

- En général (il y a des exceptions mais elles sont rares), on ne touche pas aux paramètres d'une fonction dans le coeur de la fonction. Les paramètres sont les nombres que vous demandez à l'utilisateur de votre programme, ce n'est donc en général pas à vous de les manipuler. Par exemple

```
1 def suite(n):
2     n=0
```

que l'on rencontre souvent dans vos copies devrait vous faire réagir : vous demandez un nombre n à l'utilisateur et vous ne tenez pas compte de ce qu'il vous donne en modifiant son choix dès le début du programme.

- Lorsqu'il s'agit de simuler une variable aléatoire, votre programme doit retourner une valeur qui est une valeur prise par la variable. Il arrive souvent que l'on sache qu'une variable prenne une valeur entière. Si votre programme n'est pas construit de manière à rendre une valeur entière, c'est qu'il y a un problème. Cette erreur se produit très souvent lorsqu'on confond les *valeurs* que prend une variable avec les *probabilités* avec laquelle elle prend ses valeurs.

Il est nécessaire d'avoir l'hygiène de vérifier au moins ces trois points là.

BARÈME ET EXIGENCES.

Exercice 1 : 19 points.

1. 6 points, 3 pour chacune des deux sommes. Les trois points sont répartis en 1 pour la convergence et 2 pour le calcul de la somme infinie (pas de pénalité si la première somme n'est pas complètement simplifiée).
2. 4 points, 1 pour la formule du binôme, 1 pour vérifier l'hypothèse (les matrices commutent), 2 pour la simplification de la somme et l'expression des matrices A^n .
3. 5 points. C'est une pure question d'informatique et il n'est pas attendu que l'on montre la divergence vers $+\infty$ de la suite récurrente. 1 point pour les appels de bibliothèques (ici `math` ou `numpy` suffit), 1 point pour la déclaration de la fonction, 2 points pour l'organisation de la boucle `while` et 1 point supplémentaire si le programme marche.
4.
 - a. 1 point, question de cours.
 - b. 2 points, on fait la vérification.
 - c. 1 point, il suffit de citer le principe de superposition.

Exercice 2 : 59 points.

1. 2 points, 1 pour analyser la contrainte (il faut que $\frac{1}{1-x}$ soit strictement positif), 1 pour trouver l'intervalle de définition.
2. 2 points, 1 pour chaque limite, aucune difficulté particulière.
3. 3 points, 1 pour la dérivée de f , 1 pour le signe de la dérivée, 1 pour récapituler sous forme de tableau.
4. 3 points, 1 pour l'équation de la tangente (c'est facile avec la dérivée de la question précédente), 2 pour la position de la courbe par rapport à sa tangente. Pour les cubes, le mieux est de faire un DL, pour les carrés, le mieux est de chercher la convexité / concavité de la fonction en 0. On peut aussi chercher le signe de $f(x) - x$ mais c'est sûrement plus compliqué.
5. 5 points, 1 pour dessiner une courbe sur le bon intervalle de définition, 1 pour la croissance, 1 pour les bonnes limites, 1 pour la tangente, 1 pour la position de la courbe par rapport à la tangente.
6.
 - a. 1 point, question de cours.
 - b. 1 point, question très simple.
 - c. 2 points, 1 pour dire qu'une suite croissante diverge vers $+\infty$ ou bien converge. Puis 1 pour dire que la convergence serait équivalente à la convergence de la série harmonique.

- d. 2 points, c'est un argument de comparaison que les carrés n'ont pas encore vu mais dont ils peuvent avoir l'intuition. Les points sont donnés facilement pour les carrés, les cubes doivent écrire l'argument dans le détail.
- 7. a. 3 points, il y a trois choses à faire pour montrer que des suites sont adjacentes : l'une croît, l'autre décroît et la différence tend vers 0 (1 point pour chaque).
 b. 2 points, 1 pour citer le théorème des suites adjacentes, 1 pour en déduire la convergence de la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 c. 2 points, attention à la gestion des signes dans les inégalités.
 d. 1 point, en principe, déjà fait à la question a.
- 8. 2 points, même chose que pour la question 7.
- 9. 2 points, comme pour la 6.c.
- 10. a. 4 points, 2 pour chacune des intégrales, répartis en 1 pour donner une primitive et 1 pour finir le calcul de l'intégrale.
 b. 2 points, c'est une traduction des calculs précédents.
- 11. 3 points, 1 pour savoir quel rôle donner aux fonctions dans l'IPP, 1 pour la réalisation de l'IPP (avec l'hypothèse!), 1 pour la formule demandée.
- 12. 3 points, 1 pour l'initialisation, 2 pour l'hérédité.
- 13. a. 2 points, étude de fonction ou à nouveau $a - t = a - 1 + 1 - t$.
 b. 3 points, dont 1 pour citer la croissance de l'intégrale.
 c. 2 points, 1 pour la limite de $R_n(a)$, 1 pour passer à la limite dans 12.
- 14. a. 2 points, 1 pour comprendre que c'est $a = \frac{1}{2}$ qui donne l'encadrement, 1 pour se souvenir de la question 12 puis 13.b.
 b. 5 points, à discuter en fonction de la cohérence et de la bonne marche des programmes Python.
 c. 2 points, 1 pour un (petit) argument pour identifier chacune des deux suites.

Exercice 3 : 59 points.

- 1. a. 1 point, pure question de cours.
 b. 3 points, 1 pour la loi, 1 pour l'espérance, 1 pour la variance.
- 2. a. 3 points, 1 pour décrire l'événement avec des pile ou face, 2 pour calculer sa probabilité (1 pour l'intépendance des lancers bien utilisée).
 b. 2 points, 1 pour citer la formule des probas totales avec le bon SCE, 1 pour le calcul de la somme (pas besoin de justifier la convergence, ça fait partie de l'énoncé de la formule).
- 3. a. 1 point, le texte nous fait plus ou moins admettre que la loi de R est géométrique de paramètre p .
 b. 2 points, 1 pour la loi du nombre de pile isolés, 1 pour son espérance.
- 4. a. 4 points, question assez difficile. 1 point pour montrer que ce qui est admis revient à dire que $[N_i = 0] = [R < i]$ (c'est une égalité entre événements). Une explication vague donne 1 point (en fait il serait plus rigoureux d'utiliser la formule des probas totales, auquel cas, 1 point supplémentaire). Ensuite 2 points pour le calcul de $\mathbb{P}(R < i)$.
 b. 2 points, 1 pour écrire que $\mathbb{P}([N_i = k]) = \mathbb{P}([R \geq i]) \mathbb{P}_{R \geq i}(N_i = k)$ (ce serait mieux avec la formule des probas totales mais je ne pénalise pas). Puis 1 pour conclure, avec la loi de N trouvée précédemment.
 c. 2 points, calcul de sommes de séries géométriques.
- 5. 2 points, encore un calcul (plus simple)
- 6. a. 2 points, la seule difficulté consiste à montrer qu'il ne peut pas y avoir plus de n variables de type N_i impliquées. J'accepte une bonne partie des explications avec des phrases.
 b. 2 points, l'explication rigoureuse n'est pas facile à trouver...

- c. 2 points, encore un argument de comparaison qui devrait mieux marcher pour les cubes.
- 7. 2 points, à rédiger nécessairement par une double inégalité.
- 8. 4 points, 1 par ligne complétée.
- 9. 3 points, pour un programme bien écrit, à pondérer sinon.
- 10. a. 3 points, très classique mais il faut écrire un programme correct. (quelques points donnés si l'idée me semble cohérente mais que le programme est mal écrit).
b. 2 points, il faut calculer $\mathbb{P}([T = 4])$ et comparer avec 0,123. Les cubes sont encouragés à citer la loi faible des grands nombres mais c'est hors barème.
- 11. 3 points, question très simple, 1 pour la loi, 1 pour l'espérance, 1 pour la variance (question de cours).
- 12. a. 4 points, 2 pour la *dépendance* de Y_n et Y_{n+1} et 2 pour l'indépendance de Y_n et Y_m .
b. 3 points, 2 pour le calcul de la covariance dans le cas $n/n+1$ et 1 pour citer le cours (indépendance implique non corrélation) dans le cas n/m .
- 13. a. 3 points, 1 point pour l'espérance, 2 pour la formule sur la variance (le mieux semble de faire une récurrence sur n).
b. 2 points, manipulation d'inégalités simple.
- 14. 2 points, 1 pour chaque partie de la question. Grand classique

Orthographe, présentation, lisibilité, soin de la copie : 7 points. Le total de 144 points est divisé par 4.5 pour faire une note sur 20 (il y a donc 32 points à prendre en tout).

CORRECTION DÉTAILLÉE.

CORRECTION 1 1. a. Il s'agit de faire apparaître des séries géométriques et géométriques dérivées, c'est-à-dire des termes généraux de la forme

$$q^n \quad \text{ou} \quad nq^{n-1} \quad \text{ou encore} \quad n(n-1)q^{n-2}.$$

On rappelle l'astuce suivante, très fréquemment utilisée pour faire apparaître une série géométrique dérivée seconde, :

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

On écrit aussi pour assembler les puissances de -2 et les puissances de 5 : $(-2)^{n+2} = 4(-2)^n$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2 (-2)^{n+2}}{5^n} &= 4 \sum_{n \geq 0} n^2 \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 8 \sum_{n \geq 0} n \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 4 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-2}{5}\right)^n \\ &= 4 \sum_{n \geq 0} n(n-1) \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 12 \sum_{n \geq 0} n \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 4 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-2}{5}\right)^n \\ &= 4 \sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 12 \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{-2}{5}\right)^n + 4 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme de trois séries convergentes : la première est une série géométrique dérivée seconde de raison $q = \frac{-2}{5}$, la deuxième est une série géométrique dérivée première de même raison et la dernière est une série géométrique simple, toujours de même raison. On sait donc que ces séries convergent puisque la raison (commune) est strictement comprise entre -1 et 1. Le cours donne aussi la valeur des sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2 (-2)^{n+2}}{5^n} = 4 \left(\frac{4}{25}\right) \frac{2}{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^3} + 12 \left(\frac{-2}{5}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^2} + 4 \frac{1}{1 + \frac{2}{5}}$$

qu'il resterait à simplifier.

- b. La deuxième somme ressemble à une somme télescopique mais à ce détail près que le télescopage se produit avec un délai : le terme numéro n de $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ se simplifie avec le terme numéro $n+3$ de $-\frac{1}{\sqrt{n}}$, contrairement au cas plus simple où la simplification a lieu directement avec le terme suivant. Dans cette situation, on peut se débrouiller pour se ramener à une somme de séries télescopiques simples. En effet

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

On reconnaît alors trois sommes télescopiques et ces sommes télescopiques convergent puisque les suites de termes généraux $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$, $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ convergent. Par linéarité la série que nous étudions converge et on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{1+2}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{1+1}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1. \end{aligned}$$

2. Notons B et C les matrices suivantes :

$$B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a $A = B + C$ et (hypothèse indispensable !!) B et C commute. En effet, la matrice identité B commute avec toutes les matrices. Nous pouvons donc appliquer la formule du binôme à la somme :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^k B^{n-k}.$$

Pour terminer le raisonnement, nous devons calculer les puissances de B et C (en espérant bien sûr qu'elles soient plus simples que celles de A). Or la matrice B , qui est égale à l'identité à pour puissance, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B^k = I_3^k = I_3.$$

Il reste à calculer les puissances de C . C'est très classique. Il se trouve qu'en fait C est *nilpotente*. Le calcul donne en effet

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que toutes les puissances d'exposant supérieur à 2 sont nulles : pour tout $k \geq 2$, $C^k = C^2 C^{k-2} = 0 C^{k-2} = 0$.

On peut donc simplifier la somme qui est le 2ème membre de la formule du binôme :

$$A^n = \binom{0}{n} C^0 I + \binom{1}{n} C I + \binom{n}{2} C^2 I_3$$

(tous les autres termes sont nuls parce qu'ils font intervenir une puissance supérieure de C). Finalement

$$A^n = I_3 + nC + \frac{n(n-1)}{2} C^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On admet donc que la suite diverge (c'est-à-dire que le programme suivant ne va pas tourner éternellement) et on peut s'y prendre de la façon suivante

```

1 import numpy as np
2
3 def seuil(A) :
4     u=2
5     n = 0
6     while u<A :
7         u = np.exp(u).np.exp(1)*u
8         n = n+1
9     return n

```

4. a. C'est une question de cours, on sait que les fonctions solutions sont toutes les fonctions de la forme

$$\{t \mapsto Ce^{2t} \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

(il y a bien une infinité de telles fonctions, une pour chaque valeur de C).

- b. Il suffit de vérifier que la fonction présentée est bien une solution de l'équation différentielle. On note donc $f(t) = cte^{2t}$. On constate que f est bien dérivable et que

$$f'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = ce^{2t} + 2f(t).$$

Ainsi f est bien solution de l'équation différentielle avec second membre de cette question.

- c. Il reste à nouveau à citer le cours, et précisément le principe de superposition des solutions d'une équation différentielle : les solutions générales de l'équation différentielle avec second membre sont des sommes de solutions de l'équation sans second membre (celles de la question a) avec la solution particulière (celle de la question b) :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{2t} + cte^{2t} \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

CORRECTION 2

Pour une correction d'ECRICOME 2026, voir le lien <https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/ECRICOME26cor.pdf>

CORRECTION 3

Pour une correction de l'EML 2026, voir le lien <https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/EML26cor.pdf>